

Ψηφιακά Ηλεκτρονικά I

3. Αριθμητικές πράξεις στο Δυαδικό σύστημα αρίθμησης

1

Β' Τεχνική Σχολή Λεμεσού

2023 – 2024

Άριστος Πασιάς

There are only 10 types
of people in the world:
Those who understand binary
and those who don't.

Αριθμητικές πράξεις στο Δυαδικό σύστημα

3

Με το τέλος της ενότητας αυτής θα πρέπει όλοι να μπορείτε να:

1. Εκτελείτε προσθέσεις, αφαιρέσεις, πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.
2. Υπολογίζετε το συμπλήρωμα δυαδικού αριθμού ως προς 1 και ως προς 2.
3. Εκτελείτε αφαιρέσεις δυαδικών αριθμών με τη μέθοδο της πρόσθεσης του συμπληρώματος.



Δυαδική πρόσθεση

4

Κανόνες:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 0 \text{ και κρατούμενο } 1$$

Όταν έχουμε μεταφορά:

$$1 + 0 + 0 = 1 \text{ και κρατούμενο } 0$$

$$1 + 0 + 1 = 0 \text{ και κρατούμενο } 1$$

$$1 + 1 + 0 = 0 \text{ και κρατούμενο } 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 \text{ και κρατούμενο } 1$$

Δυαδική πρόσθεση : Παράδειγμα

5

$$\begin{array}{r} 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ \mathbf{1} \\ +\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ \mathbf{0} \\ \hline \end{array}$$

(a) Bit 0, $1 + 0 = 1_2$

$$\begin{array}{r} 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ \mathbf{0}\ 0\ 1 \\ +\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ \mathbf{0}\ 1\ 0 \\ \hline \end{array}$$

(c) Bit 2, $0 + 0 = 0_2$

$$\begin{array}{r} 0\ 0\ 1\ \mathbf{1}\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ +\ 0\ 0\ \mathbf{10}\ \mathbf{11}\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ \hline \end{array}$$

(e) Bit 4, $1 + 1 + \text{carry_in} = 11_2$

$$\begin{array}{r} 0\ \mathbf{0}\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ +\ 0\ \mathbf{10}\ \mathbf{10}\ \mathbf{11}\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ \hline \end{array}$$

(g) Bit 6, $0 + 0 + \text{carry_in} = 1_2$

$$\begin{array}{r} 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ \mathbf{0}\ 1 \\ +\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ \mathbf{1}\ 0 \\ \hline \end{array}$$

(b) Bit 1, $0 + 1 = 1_2$

$$\begin{array}{r} 0\ 0\ 1\ 1\ \mathbf{1}\ 0\ 0\ 1 \\ +\ 0\ 0\ 0\ \mathbf{11}\ \mathbf{1}\ 0\ 1\ 0 \\ \hline \end{array}$$

(d) Bit 3, $1 + 1 = 10_2$

$$\begin{array}{r} 0\ 0\ \mathbf{1}\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ +\ 0\ \mathbf{10}\ \mathbf{10}\ \mathbf{11}\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ \hline \end{array}$$

(f) Bit 5, $1 + 0 + \text{carry_in} = 10_2$

$$\begin{array}{r} \mathbf{0}\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ +\ \mathbf{0}\ \mathbf{10}\ \mathbf{10}\ \mathbf{11}\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ \hline \end{array}$$

(h) Bit 7, $0 + 0 = 0_2$

$$\begin{array}{r} \iff 57_{10} \\ +\ 26_{10} \\ \hline = 83_{10} \end{array}$$

Δυαδική πρόσθεση

6

Παράδειγμα 1:

$$\begin{array}{r} 101 \\ 110 \\ \hline 1011 \end{array}$$

Παράδειγμα 2:

$$\begin{array}{r} 11 \\ \hline 1011 \\ 0001 \\ \hline 1100 \end{array}$$

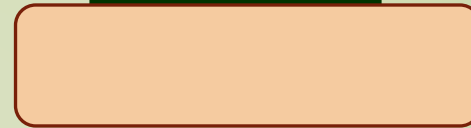
Για να προσθέσουμε περισσότερους από δύο αριθμούς, μπορούμε να προσθέσουμε τους δύο πρώτους και στο αποτέλεσμα να προστίθεται κάθε φορά ο επόμενος αριθμός μέχρι να προστεθούν όλοι.

Δυαδική πρόσθεση

7

Παράδειγμα 3:

$$\begin{array}{r} 15 \\ 20 + \\ \hline 35 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1111 \\ 10100 \\ \hline \end{array}$$



Παράδειγμα 4:

$$\begin{array}{r} 3,25 \\ 5,75 + \\ \hline 9,00 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11,01 \\ + 101,11 \\ \hline \end{array}$$



Δυαδική αφαίρεση

8

Κανόνες:

$$0 - 0 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

$$1 - 0 = 1$$

$$0 - 1 = 1 \text{ με δανεισμό } 1 \text{ μονάδας}$$

Παραδείγματα:

$$\begin{array}{r} 101 \\ - 011 \\ \hline 010 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ - 3 \\ \hline 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10000 \\ \quad \quad 11 \\ \hline 01101 \end{array}$$

Δυαδικός πολλαπλασιασμός

9

Κανόνες:

$$0 \times 0 = 0$$

$$1 \times 0 = 0$$

$$0 \times 1 = 0$$

$$1 \times 1 = 1$$

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{r} 1110 \\ \times 101 \\ \hline 1110 \\ 0000 \\ 1110 \\ \hline 1000110 \end{array}$$

Δυαδική διαίρεση

10

Κανόνες:

$$0 : 1 = 0$$

$$1 : 1 = 1$$

Παράδειγμα:

1 1 0 0 1

1 0 1

1 0 1

1 0 1

0 0 1 0 1

.

Συμπλήρωμα ως προς 2

11

Συμπλήρωμα ως προς τη βάση:

Συμπλήρωμα ως προς τη βάση ενός αριθμού είναι η διαφορά του αριθμού αυτού από την αμέσως μεγαλύτερη δύναμη της βάσης του

Π.χ.

$$427_{10} = 1000 - 427 = 573$$

$$56_{10} = 100 - 56 = 44$$

$$1101_2 = 10000 - 1101 = 0011$$

$$11011_2 = 100000 - 11011 = 00101$$

Στο δυαδικό Σύστημα το συμπλήρωμα ως προς τη βάση λέγεται και **συμπλήρωμα ως προς 2**.

Συμπλήρωμα ως προς 1

12

Συμπλήρωμα ως προς τη βάση -1:

Συμπλήρωμα ως προς τη βάση -1 ενός αριθμού είναι η διαφορά του αριθμού αυτού από τον μέγιστο αριθμό της ίδιας βαθμίδας. **Είναι προφανές ότι το συμπλήρωμα ως προς τη βάση -1 είναι κατά μία μονάδα μικρότερο του συμπληρώματος ως προς τη βάση.**

Π.χ.

$$427_{10} = 999 - 427 = 572$$

$$56_{10} = 99 - 56 = 43$$

$$1101_2 = 1111 - 1101 = 0010$$

$$11011_2 = 11111 - 11011 = 00100$$

Στο δυαδικό Σύστημα το συμπλήρωμα ως προς τη βάση -1 λέγεται και **συμπλήρωμα ως προς 1**.

Συμπληρώματα

13

Να υπολογίσετε το συμπλήρωμα ως προς 1 των δυαδικών αριθμών:

110100_2

1001101_2

11001101_2

$$\begin{array}{r} 111111 - \\ 110100 \\ \hline 001011 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 1111111 - \\ 1001101 \\ \hline 0110010 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 11111111 - \\ 11001101 \\ \hline 00110010 \end{array}$$

Τι παρατηρείτε σε σχέση με το συμπλήρωμα ως προς 1 Δυαδικού αριθμού;;;

Ναι μπορούμε εύκολα να το υπολογίσουμε χωρίς πράξεις. Απλά αντιστρέφουμε κάθε ψηφίο με το συμπλήρωμα του.

Αφαίρεση με τη πρόσθεση των συμπληρωμάτων

14

Κανονική Αφαίρεση

$$\begin{array}{r} 6 \ 4 \ 7 \\ - 2 \ 8 \ 3 \\ \hline = 3 \ 6 \ 4 \end{array} \quad \longleftrightarrow$$

Πρόσθεση του συμπληρώματος ως προς 10

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\ - 2 \ 8 \ 3 \\ \hline = 7 \ 1 \ 7 \end{array} \quad \longrightarrow$$

Υπολογισμός
συμπληρώματος
ως προς 10

$$\begin{array}{r} 6 \ 4 \ 7 \\ + 7 \ 1 \ 7 \\ \hline = 1 \ 3 \ 6 \ 4 \\ \hline 3 \ 6 \ 4 \end{array}$$

Πρόσθεση του
συμπληρώματος
στον αφαιρέτη

} Αγνοούμε
την
Υπερχείλιση

Κανονική Αφαίρεση

$$\begin{array}{r} 6 \ 4 \ 7 \\ - 2 \ 8 \ 3 \\ \hline = 3 \ 6 \ 4 \end{array} \quad \longleftrightarrow$$

Πρόσθεση του συμπληρώματος ως προς 9 (βάση-1)

$$\begin{array}{r} 9 \ 9 \ 9 \\ - 2 \ 8 \ 3 \\ \hline = 7 \ 1 \ 6 \end{array} \quad \longrightarrow$$

Υπολογισμός
συμπληρώματος
του 9

$$\begin{array}{r} 6 \ 4 \ 7 \\ + 7 \ 1 \ 6 \\ \hline = 1 \ 3 \ 6 \ 3 \\ \hline \\ \\ \\ \\ \hline 3 \ 6 \ 4 \end{array}$$

Πρόσθεση του
συμπληρώματος στον
αφαιρέτη

} Πρόσθεση
υπερχείλισης
στις μονάδες

Δυναδική Αφαίρεση με τη πρόσθεση του συμπληρώματος ως προς 1

15

Βήματα:

1. Σχηματίζουμε το συμπλήρωμα ως προς 1 του αφαιρετέου και το προσθέτουμε στον αφαιρέτη.
2. Αν προκύψει κρατούμενο στην τελευταία βαθμίδα (υπερχείλιση - over flow) τότε το αποτέλεσμα είναι **θετικό** και για να το βρούμε **προσθέτουμε το κρατούμενο στο λιγότερο σημαντικό ψηφίο του αθροίσματος**.
3. Αν δεν έχουμε κρατούμενο στην τελευταία βαθμίδα τότε το αποτέλεσμα είναι **αρνητικό** και για να βρούμε τη τιμή του, σχηματίζουμε το **συμπλήρωμα ως προς 1 του αθροίσματος** και βάζουμε μπροστά το **πρόσημο -**

Δυαδική Αφαίρεση με τη πρόσθεση του συμπληρώματος ως προς 1

16

Παράδειγμα 1:

36
-15
21

100100
-001111

Συμπλήρωμα ως προς 1



Προσθέτω

100100

+110000

1 010100

+1

010101

Προσθέτω την υπερχείλιση στο LSB

Δυαδική Αφαίρεση με τη πρόσθεση του συμπληρώματος ως προς 1

17

Παράδειγμα 2:

15
-36
-21

001111
-100100

Συμπλήρωμα ως προς 1



Προσθέτω
Δεν έχω υπερχείλιση

001111
+011011
101010

Συμπλήρωμα ως προς 1
και αρνητικό πρόσημο -

-10101

Δυαδική Αφαίρεση με τη πρόσθεση του συμπληρώματος ως προς 2

18

Βήματα:

1. Σχηματίζουμε το συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρετέου και το προσθέτουμε στον αφαιρέτη
2. Αν προκύψει κρατούμενο στην τελευταία βαθμίδα (υπερχείλιση - over flow) τότε το αποτέλεσμα είναι **θετικό** και για να το βρούμε **διαγράφουμε το κρατούμενο.**
3. Αν δεν έχουμε κρατούμενο στην τελευταία βαθμίδα τότε το αποτέλεσμα είναι **αρνητικό** και για να βρούμε τη τιμή του, σχηματίζουμε το **συμπλήρωμα ως προς 2 του αθροίσματος** και βάζουμε μπροστά το **πρόσημο -**

Δυαδική Αφαίρεση με τη πρόσθεση του συμπληρώματος ως προς 2

Παράδειγμα 1:

89

-23

66

Συμπλήρωμα ως προς 2
(Συμ. ως προς 1 + 1)

Προσθέτω

Διαγράφω την
υπερχείλιση

1011001

-0010111



1011001

+1100001

≠ 1000010

1000010

Δυαδική Αφαίρεση με τη πρόσθεση του συμπληρώματος ως προς 2

20

Παράδειγμα 2:

13

-28

-15

Συμπλήρωμα ως προς 2
(Συμ. ως προς 1 + 1)

Πρόσθεση

Δεν έχω υπερχείλιση

Συμπλήρωμα Ως προς
2 και αρνητικό πρόσημο

01101

-11100



01101

+00100

10001

-01111

Δυαδική Αφαίρεση με τη πρόσθεση του συμπληρώματος ως προς 1

21

Standard subtraction

$$\begin{array}{r} 00111001 \\ - 00011110 \\ \hline = 00011011 \end{array} \iff 57_{10} - 30_{10} = 27_{10}$$



Ones' complement equivalent

$\begin{array}{r} 11111111 \\ - 00011110 \\ \hline = 11100001 \end{array}$ <p>Take ones' complement</p>	\rightarrow	$\begin{array}{r} 00111001 \\ + 11100001 \\ \hline 100011010 \\ \hline 00011011 \end{array}$ <p>Add ones' complement to minuend</p>	} End-around-carry

Δυαδική Αφαίρεση με τη πρόσθεση του συμπληρώματος ως προς 2

22

Standard subtraction

$$\begin{array}{r}
 00111001 \\
 - 00011110 \\
 \hline
 = 00011011
 \end{array}
 \iff 57_{10} - 30_{10} = 27_{10}$$



Two's complement equivalent

$ \begin{array}{r} 10000000 \\ - 00011110 \\ \hline = 11100010 \end{array} $ <p style="text-align: center;">Take two's complement</p>	→	$ \begin{array}{r} 00111001 \\ + 11100010 \\ \hline 100011011 \\ \hline 00011011 \end{array} $ <p style="text-align: center;">Add two's complement to minuend</p>	} Drop any carry
--	---	--	------------------

Αριθμητικές πράξεις στο Δυαδικό σύστημα

23

